

Fælles nordisk læreplan: Matematik

GNU matematik: läroplaner och GNUbisk kub

Lena Pareto
Högskolan Väst,
Trollhättan, Sverige.

Leif Vejbæk
University College
Sjælland, Denmark.

Tor Arne Wølner
Høgskolen i Buskerud og
Vestfold, Norge

1. Inledning

För den gränsöverskridande undervisningen i matematik har vi tagit utgångspunkt i de nordiska ländernas respektive läroplan i syfte att identifiera *gemensamt innehåll* och *gemensamma mål*, för att säkerställa relevansen av den gränsöverskridande undervisningen. I det arbetet har primärt fokus varit att identifiera *läroplanernas likheter* avseende gemensamt innehåll och gemensamma mål. Samtidigt har vi försökt *dra nytta av de olikheter som förekommer*, och försökt se dessa som en utmanande och potentiellt kvalitetshöjande dimension av det gränsöverskridande samarbetet som i sin tur är tänkt att skapa didaktiska mervärden. Det analysarbetet ledde fram till en undervisningsmodell för Gränsöverskridande Nordisk Undervisning i matematik: den GNUbiska kuben. Modellen kan både fungera som ett stöd i planering av nya, gränsöverskridande undervisningsförlöp¹ (i huvudsak för lärarna) men även som ett analysverktyg (för professionsforskarna eller lärarna) för att kategorisera och systematisera olika typer av gränsöverskridande undervisningsförlöp. Principen för GNUbiska kuben är dock inte ämnesspecifik även om den konkreta modellen är det, och motsvarande GNUbiska kuber har utvecklats även för andra ämnena inom GNU.

¹ Med ett undervisningsförlöp menas en planerad lite större matematikuppgift med ett specifikt syfte och flera moment som vanligtvis sträcker sig över ett antal lektioner. Jämför undervisningsförløb (DK), undervisningsopplegg (NO) och undervisningsupplägg (SE). Ett *GNU-förlöp* är ett undervisningsförlöp som genomförs som Gränsöverskridande Nordiskt Undervisning (GNU).

2. Jämförelse läroplaner Danmark, Norge och Sverige

I alla såväl de svenska som de danska och norska läroplanerna/kursplanerna i matematik betonas matematikens användning i samhället. Gemensamt för de nordiska planerna i matematik är att de utgör stöd för användning, tolkning, problemlösning och samhällsanknytning av matematikämnet.

De kursplaner vi har haft tillgång till är av varierande omfattning. Den svenska kursplanen i matematik är i denna version sju sidor medan den danska är på 190 sidor. Det betyder att den danska läroplanen är avsevärt mer innehållsrik och innefattar allt från resonemang om kompetensmodellen till detaljer om uppläggning av undervisningen. Den norska läroplanen är på elva sidor men refererar till såväl högre nivåer, det vill säga såväl diskussion om kunskapssyn och värdegrund som till mer konkreta förslag till hur matematikundervisningen kan utformas.

Den *svenska kursplanen* i matematik är en del av en övergripande ny läroplan som antagits 2011. Att läroplanen är ny innebär att många skolor i Sverige har lagt ner mycket tid på att implementera en ny läroplan. Den svenska läroplanen betonar intresse för ämnet, förmåga, kompetenser och tilltro till sin förmåga, estetiska värden och att reflektera över matematikens användning i samhället. Kursplanen är i huvudsak organiserad efter *centralt innehåll* (vilka delar av matematiken som ska ingå) och vilka *förmågor* som eleverna förväntas tillgodogöra sig. För olika stadier (klass-nivå) finns uppräknings av centralt innehåll men inte på detaljnivå vad eleverna ska kunna.

Den *danska läroplanen* från 2009 är betydligt mer omfattande läroplan. Den tar utgångspunkt i *kompetenser* (Niss et. al. 2002), ”kompetensblomster”. Läroplanen är detaljerad med många exempel och betoning på användning av matematiken i andra ämnen och vardagliga sammanhang. Några exempel är att samla träningsresultat i en idrottsloggbok, användning för bostadsplanering och hur man kan arbeta när man har andraspråks elever. Läroplanen betonar användning i samhällsfrågor och ger utförliga beskrivningar av att använda statistik, diagram, medelvärden osv. den innehåller också förslag om organisation och arbetsformer. Läroplanen ger också anvisningar för hur man kan analysera läroböcker i matematik. Läroplanen är detaljstyrande och liknar vad vi i Sverige skulle kalla lärarhandledning, i denna form övergripande för hela grundskolan.

Den norska läroplanen (LK06), fagplanen för matematik, inleds med att betona matematiken som kulturarv och samhällsämne. Kursplanerna betonar att kunna uttrycka sig muntligt, skriftligt och kunna läsa matematik i betydelsen att använda och granska matematisk information. Den betonar också att kunna räkna och lösa problem. De norska kompetensmålen är mer detaljerade beträffande olika matematiska detaljkunskaper, det vill säga vad eleverna ska kunna. I Norge används också de danska kompetensmodellerna. Det finns länkar till ett system av kursplaner samt länkar till generella delar av läroplaner om hur lärande går till (allmänna principer for opplæring) samt veiledning, handledning för matematikundervisningen.

Den största skillnaden mellan läroplanerna är *vilken typ av information* man har valt att inkludera i läroplanen. Om vi istället ser informationen på tre nivåer: nivån

varför (kunskapssyn och värdegrund), nivån *vad* (specifikation av innehåll och kunskapskrav), och nivån *hur* (handledning och exempel på hur undervisningen kan/ska genomföras), så innefattar den svenska läroplanen enbart vad-nivån, den danska innehåller alla tre nivåerna och den norska innehåller vad-nivån men refererar till dokument på de övriga två nivåerna. Innehållsmässigt är de tre läroplanerna relativt lika avseende vad-nivån, vilket vi kommer beskriva i den detaljerade analysen nedan.

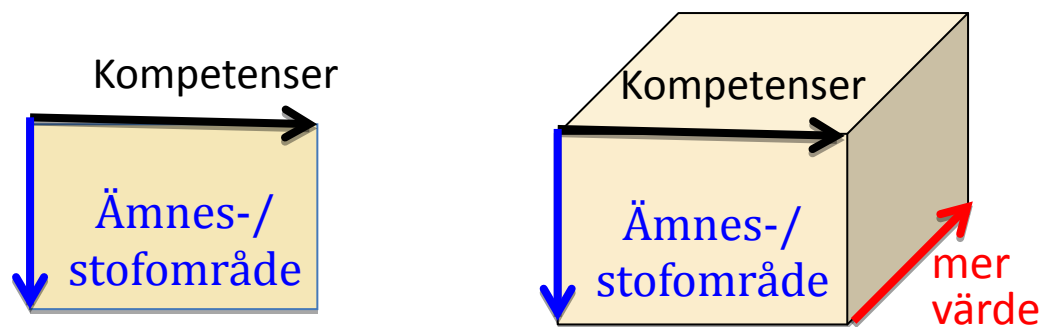
3. Den GNUbiska kuben i matematik

I den inledande fasen av GNU-projektet blev det tydligt att det var långt ifrån uppenbart för vare sig forskare eller lärare *vilken typ av ämnesmässiga mervärden* gränsöverskridande undervisning i matematik kunde ge. Därför samlades de nordiska forskarna i en workshop för att diskutera läroplanerna, matematisk kompetens och försöka ta fram konkreta förslag på möjliga mervärden med GNU-förlöp i matematik. Under denna workshop presenterades följande matris-struktur ur en dansk nationell rapport om matematikutveckling (rapporten Kompetencer og matematiklæring: Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark från Undervisningsministeriet 2002):

Tabell 1. Dansk klassificeringsmatris (stofområde - kompetens)

Kompetence/ Stofområde	Tanke- gangs- komp.	Problem- håndt.- komp.	Model- lerings- komp.	...	Hjælpe- middel- komp.
stofområde 1					
stofområde 2					
...					
stofområde <i>n</i>					

Grundtanken med matris-modellen är att alla kompetenser kan tränas i alla ämnesområden, men att dessa samspel kan vara olika. Varje cell i matrisen representerar således ett samspel mellan *ett specifikt ämnes/faginnnehåll* och en *specifik kompetens*. Under workshoppen uppstod idén med att utöka matrisen till en kub genom att lägga till en ytterligare dimension: *ämnesmässigt mervärde*. På så sett kommer varje cell i kuben representera *ett samspel mellan ett specifikt ämnesinnehåll, en specifik kompetens och ett specifikt mervärde*, dvs en typ av *klassificeringssystem för GNU-förlöp* där såväl innehåll, kompetens som tränas, samt det tänkta mervärdet med samarbetet är tydligt utpekade.







Figur 1. Utveckling av modell till tre dimensioner: ämnesområde – kompetens – didaktiskt mervärde

3.1. Gemensamt innehåll

Under workshopen analyserade professionsforskarna likheter och skillnader i sina respektive länders läroplaner. Det matematiska innehållet i de tre läroplanerna skiljde sig inte åt på något fundamentalt sätt, däremot skilde sig klassificeringen av innehållet åt något. Efter lite diskussion kom vi fram till följande kategorisering i den Nordiska modellen av ämnesinnehåll:

Tabell 2. Översättning mellan kategoriseringar av ämnesinnehåll i de nordiska läroplanerna

GNUbisk kub 	Danska 	Norska 	Svenska 
Ämnes/stofområden	Stofområde	Hovudområden	Centralt innehåll
1. Tal och aritmetik	Talområdene Aritmetik	Tal (og algebra)	Taluppfattning och tals användning
2. Algebra	Algebra	(Tal og) algebra	Algebra
3. Samband & förändring	Funktioner Diskret matematik	Funksjonar	Samband och förändring
4. Geometri	Geometri	Geometri	Geometri
5. Mätning (mått & enheter)		Måling	
6. Statistik & sannolikhet	Sandsynlighedsregning Statistik	Statistikk, sannsyn og kombinatorikk	Sannolikhet och statistik
(ingår som kompetens istället för innehåll)			Problemlösning

Två förklaringar om kategoriseringen i Tabell 2:

1. Punkt 5, Mätning (mått och enheter) finns inte som egen kategori i vare sig den svenska eller danska läroplanen, men finns med inom t.ex. geometri: ”Jämförelse, uppskattning och mätning av längd, area, volym, massa, tid och vinkel med vanliga måttenheter”. Kunskapskategorin pekas även ut i beskrivningen av EU:s

nyckelkompetenser: ”Bland nödvändiga kunskaper i matematik ingår goda kunskaper om måttenheter.” Därför bedömde vi kategorin som relevant för en nordisk klassificering.

2. I den svenska läroplanen finns problemlösning med som ett centralt innehåll, t.ex. för årskurs 7-9: ”Strategier för problemlösning i vardagliga situationer och **inom olika ämnesområden**”, ”Matematisk formulering av frågeställningar utifrån vardagliga situationer och **olika ämnesområden**”, samt ”Enkla matematiska modeller och hur de kan användas i **olika situationer**”. Men problemlösning kan även ses som en förmåga, och finns t.ex. med bland de generella kunskapsmålen: ”kan lösa problem och omsätta idéer i handling på ett kreativt sätt”. Vi valde att följa den danska modellen och behandla *problemlösning som en förmåga* (en kompetens) i den GNUBiska kuben, eftersom vi ansåg det tydligare på så sätt att problemlösning-förmåga kan användas i alla olika ämnesområdena (vilket är budskapet i citaten ovan).

3.2. Kompetenser

Det finns många olika definitioner av begreppet kompetens. Enligt en svensk statlig utredning (SOU 1991:56) är kompetens ”förmågan att klara av de olika krav som ställs i en viss situation i en viss verksamhet”. Kompetens är förmågan att lösa en uppgift, att utvecklas och förverkliga idéer. Kompetens måste alltid relateras till en uppgift eller en situation i en viss verksamhet. Kompetensbegreppet omfattar inte bara teoretisk kunskap utan också färdigheter, talanger, motivation och attityder.

Matematiskt kunnande och grundläggande vetenskaplig och teknisk kompetens är en av EU:s 8 nyckelkompetenser. Enligt kompetensbeskrivningen innefattar detta följande *väsentliga kunskaper*: goda kunskaper om tal, om måttenheter och om strukturer, grundläggande beräkningar och grundläggande matematiska framställningssätt samt kunskaper om matematiska termer och begrepp och en medvetenhet om de frågor som matematiken kan besvara. Likaså ingår följande *väsentliga färdigheter*: tillämpa grundläggande matematiska principer och processer i vardagssituationer, både hemma och på arbetet, och för att följa och bedöma matematisk argumentation. Man bör kunna föra ett matematiskt resonemang, förstå matematiska bevis och kommunicera på ett matematiskt språk samt använda lämpliga hjälpmedel.

Vi valde att anamma samma kompetens-kategorisering som den danska rapporten föreslår då de ligger helt i linje med EUs syn på matematiskt kunnande som nyckelkompetens. Dessa 8 kompetenser är (översatt till svenska):

1. Tankegångskompetens – att kunna utöva matematisk tankegång, (innefattar begreppsförståelse, värderings- och bedömningsförmåga)
2. Problembehandlingskompetens – att kunna formulera och lösa matematiska problem
3. Modelleringskompetens – att kunna analysera och bygga matematiska modeller
4. Resonemangskompetens – att kunna resonera matematiskt

5. Representationskompetens – att kunna hantera olika representationer av matematiska sakförhållanden
6. Symbol- och formalismkompetens – att kunna hantera matematiskt symbolspråk och formalism.
7. Kommunikationskompetens – att kunna kommunicera i, med och om matematik
8. Hjälpmedelskompetens – att kunna använda sig av och förhålla sig till hjälpmedel för matematisk verksamhet, bland annat IT.

Kompetensernas koppling till svensk läroplan i matematik

I den svenska läroplanen använder man begreppet matematiska förmågor istället för begreppet kompetens, dock finns motsvarande kompetenser beskrivna som förmågor. Beskrivningar som motsvarar de 7 första kompetenser ovan förekommer i den svenska läroplanens sammanfattning av matematiska förmågor, t.ex. motsvarar ”*formulera problem med hjälp av matematik*” Modelleringskompetens, ”*välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar*” Problembehandlingskompetens, och ”*samtala om, argumentera och redogöra för frågeställningar, beräkningar och slutsatser*” kommunikationskompetens. Likaså återfinns vi motsvarande beskrivningar av kompetenser i kunskapskraven, här t.ex. Kunskapskrav från årskurs 9 för betyg C: ”*Eleven kan formulera enkla matematiska modeller som efter någon bearbetning kan tillämpas i sammanhanget*”, vilket innebär modelleringskompetens.

Den 8:e kompetensen, hjälpmedelskompetens, finns inte lika uttalat i den svenska läroplanen, men finns implicit i många av de andra förmågorna. Med hjälpmedel menar man dels verktyg och analoga hjälpmedel som t.ex. linjal, passare, vinkelskiva, kulramar, geometriska schabloner, centikuber eller andra andra kloss-, brick- eller stångsystem, eller digitala hjälpmedel som t.ex. kalkylblad, kalkylator, mathLab, geoGebra. Bland de generella kunskapsmålen finns däremot ett uttalat hjälpmedelsmål: att kunna använda modern teknik som ett verktyg för kunskapssökande, kommunikation, skapande och lärande.

Kompetensernas koppling till norsk läroplan i matematik

Matematikk i den norske læreplanen er delt inn i kompetansemål etter 2., 4. 7. og 10. årstrinn. Samtidig har alle fag, også matematikk, fem grunnleggende ferdigheter, som også bør ses inn i sammenhengen med de forskjellige kompetanser i den G nubiske kub en. De fem grunnleggende ferdighetene i matematikk er:

1. Å kunne uttrykke seg muntlig i matematikk
2. Å kunne uttrykke seg skriftlig i matematikk
3. Å kunne lese i matematikk
4. Å kunne regne i matematikk
5. Å kunne bruke digitale verktøy i matematikk

Med utgangspunkt i de fem grunnleggende ferdighetene lese-, skrive-, regne-, muntlig- og digital ferdighet vil de 8 kompetansene i den G nubiske kub en, måtte få sitt utkomme fra dette, for å kunne tilpasses kompetansemålene i Norsk læreplan. De

otte kompetencer er inddelt i to grupper, som kan kaldes *at kunne spørge og svare i og med matematik*, som rummer de første fire kompetencer, og *at kunne håndtere matematikkens sprog og redskaber*, som udgøres af de fire resterende kompetencer.

At kunne spørge og svare i og med matematik:

1. Tankegangskompetence – at kunne udøve matematisk tankegang (koppling till *Å kunne regne i matematikk, å kunne uttrykke seg muntlig og å kunne lese*)
2. Problembehandlingskompetence – at kunne formulere og løse matematiske problemer (koppling till ferdigheten *Å kunne les, å regne, og enten muntlig ferdighet eller skriftlig ferdighet, for å formidle sin løsning*)
3. Modelleringskompetence – at kunne analysere og bygge matematiske modeller vedrørende andre felter (koppling flere emners kompetansemål i kombinasjon med mestring av lese- og regneferdigheter)
4. Ræsonnementskompetence – at kunne ræsonnere matematisk (koppling alle de fire grunnleggende ferdighetene lese-, skrive-, regne- og muntlig ferdighet)

At kunne håndtere matematikkens sprog og redskaber:

5. Repræsentationskompetence – at kunne håndtere forskellige repræsentationer af matematiske sagsforhold (koppling ferdigheten lese, regne og muntlig)
6. Symbol- og formalismekompetence – at kunne håndtere matematisk symbolsprog og formalisme: (koppling lese- og muntlige ferdigheter)
7. Kommunikationskompetence – at kunne kommunisere i, med og om matematik (koppling alle fire ferdighetene lese, skrive, regne og muntlig)
8. Hjælpemiddelkompetence – at kunne betjene sig af og forholde sig til hjælpemidler for matematisk virksomhed, herunder it (koppling *å kunne regne og kunne bruke digitale verktøy*)

Konklusjonen blir da at norske kompetansemål i matematikk sammen med grunnlaget i de fem grunnleggende ferdigheter er med på å bevege også de norske elevene inn i den G nubiske kubens kompetanseområder.

3.3. Ämnes-didaktiskt mervärde

De möjliga ämnes-didaktiska mervärden som identifierades kan delas in i två olika kategorier baserat på *orsaken till mervärdet*. Den första kategorin mervärden orsakas av *likheten mellan språken*; att de nordiska språken är ”**språkgrannar**”. Med språkgrannar menar vi språk som är *tillräckligt lika varandra för att det skall vara meningsfullt att försöka förstå varandra utan tidigare språkstudier*, vilket danska, norska och svenska kan anses vara. Andra exempel på språkgrannar skulle kunna vara franska, spanska och italienska. Dock är språken tillräckligt olika för att det ska skapa motivation och intresse för att undersöka och utforska vad t.ex. begrepp heter på de olika språken, och vad som är lika och vad som skiljer sig åt. Den andra kategorin mervärden grundar sig på *nationella olikheter*, där mervärdet kommer från att man försöker utnyttja eller undersöka om det finns **nationella skillnader**. Följande typer av möjliga *gränsöverskridande mervärden* har identifierades:

1. **Nationella skillnader → Skapa allmän nyfiken & motivation.**

Åtminstone i första skedet så kan man utnyttja elevernas naturliga nyfikenhet på sina grannländer och den motivation det kan skapa. Detta är ett mervärde som är generellt för alla ämnen/fag.

2. Språkgrannar → Behöver förklara för / lära av varandra

I och med att matematiska begrepp språkmässigt skiljer sig åt på de olika språken, skapas en situation där det blir naturligt för eleverna att behöva förklara för varandra vad man verkligen menar med olika begrepp. Detta kräver att de behöver fundera över begrepps betydelse, vilket leder till självreflektion och självförklaring (eng. self-explanation, vilket mycket forskning visar är bra för djupförståelse). Här kan man utnyttja situationen och gå djupare med elementära begrepp och verkligen försöka förstå vad de betyder, vilket kan vara svårt att motivera eleverna till i icke-gränsöverskridande undervisning.

3. Språkgrannar → Behov av matematiskt språk för förtydligande.

Här tänker vi så att i och med att de matematiska begreppen inte är de samma så försvåras kommunikationen så att eleverna behöver förklara och specificera för varandra vad de egentligen menar. Förhoppningen är att de i denna process kanske upptäcker fördelarna med att använda det generella och mycket specifika *matematiska språket* istället för sitt modersmål eftersom det är gemensamt för alla. Det skulle vara en mycket stor förståelsevinst om eleverna *upplever ett behov av det formella matematiska språket* istället för att som är vanligare i grundskolans att eleverna oftast uppfattar det matematiska språket som ett hinder eftersom det är ett språk som de tycker är svårt och otillgängligt.

4. Nationella skillnader → Diskutera skillnader, variationsbredd

Här tänker vi att eleverna i större utsträckning kommer i kontakt med olika matematiska algoritmer och metoder, olika sätt att angripa matematiska problem, olika problemlösningstrategier och kanske även olika attityd och sätt att se matematik på. Det skapar utmärkta tillfällen att diskutera och jämföra olika metoder (t.ex när är vilka metoder bra, effektiva, lätta att använda) men även t.ex. skillnader i olika talsystem och vad det kommer ifrån.

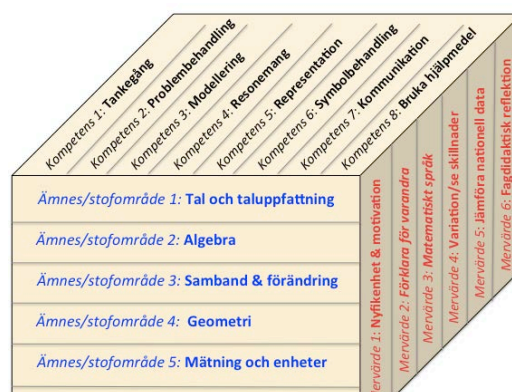
5. Nationella skillnader → Hämta o jämföra nationell data

Här tänker vi oss att man skapar uppgifter där det blir intressant att jämföra nationell data, självklart användbart inom statistik men man kan nog komma på andra matematiska problem där någon form av verklighetsbaserad nationell data används och sedan jämförs över gränserna.

6. Nationella skillnader → Uppmuntra ämnes/fagdidaktisk reflektion

I antagandet att det finns skillnader i hur matematikundervisningen bedrivs så kommer de skillnader man identifierar och diskuterar leda till att både lärare och elever behöver reflektera över ”vi gör så – de gör så – varför?”, dvs en ämnes/fagdidaktisk reflektion.

3.4. Den GNUBiska kuben i matematik



Figur 2. GNUBiska kuben i matematik

Den GNUbiska kuben är alltså en tre-dimensionell modell där varje cell i kuben består av en 3-tuppel:

1. ämne/stofområde
2. kompetens
3. mervärde

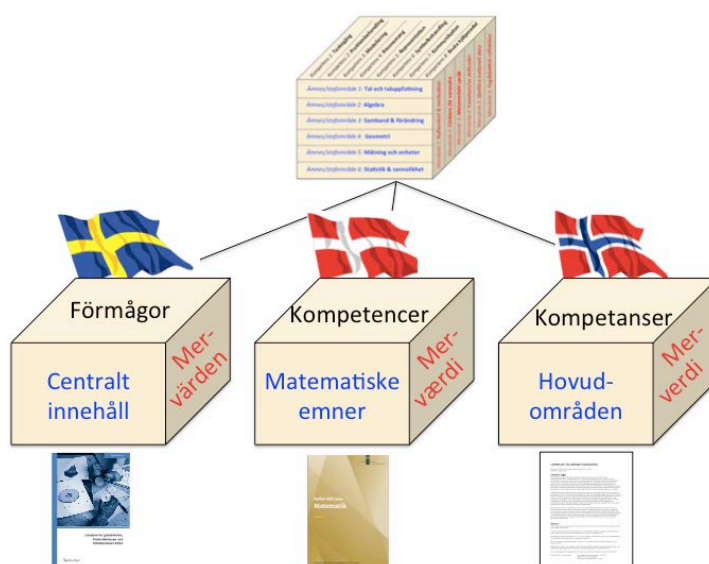
Kuben är indelad i 6 olika ämnes/strofområden, 8 olika kompetenser och 6 olika mervärden. Det ger totalt 288 olika kombinationer.

4. GNUbisk kub som analysverktyg

Den GNUbiska kuben har flera olika användningsområden. Dels är den tänkt att användas (och har används under projektets gång) som ett standardiserat analys- och kategoriseringsverktyg för olika GNU-förlöp vilket i förlängningen skulle kunna användas som en kategoriseringsmodell för att indexera databaser av gränsöverskridande undervisningsförlöp. Dels så kan modellen användas som innovations- och planeringsverktyg för att generera idéer och planera nya GNU-förlöp, där man redan från start reflekterar över vilka kompetenser som tränas och vilka didaktiska mervärden undervisningen är tänkt att ge.

Syftet med den GNUbiska kuben är att på en enkelt och tydligt sätt beskriva:

1. hur ett GNU-förlöp förhåller sig till nationell undervisning (genom kopplingen till de respektive läroplaners beskrivningar av ämnes/stof områden och kompetenser och förmågor som eleverna skall uppnå), och
2. hur det gränsöverskridande samarbetet med ett GNU-förlöp skiljer sig och ger ett ökat värde (genom den ytterligare dimensionen med mervärden)



Figur 3. Relationen mellan GNUbisk kub och nationella läroplaner

Genom att tydligt beskriva relationen mellan den GNUbiska kuben och de respektive nationella läroplanerna, kan modellen fungera som en hjälp att

överbrygga språkliga och eventuellt innehållsmässiga olikheter i de respektive läroplanerna, dvs samarbetande nordiska kollegor kan få ett gemensamt språk att använda i såväl analys- som planeringsarbete.

4.1. Erfarenheter av GNUbisk kub som analysverktyg

Den GNUbiska kuben har använts som analysverktyg av i första hand professionsforskarna men även lärare i GNU-projektet under de två senaste åren i projektet (sedan GNUbiska kuben uppfanns). En sammanställning av alla analyserade GNU-förlöp i matematik återfinns i Tabell 3 nedan). Sammanställningen kan ses som en intern utvärdering av modellens användbarhet, dvs en utvärdering av *hur bra kategorisering av kompetenser, ämnes/stofområden och mervärden fungerar* för att klassificera de exempel vi har, för att avgöra om kategoriseringen är naturlig, heltäckande och icke-överlappande. Vår bedömning är att så är fallet, dock bör modellen även valideras med en utvärdering av externa användare och bedömare.

Tabell 3 Sammanställning och kategorisering av GNU-förlöp i matematik enligt GNUbiska kuben

Förlöp	klass/trin	fagligt innehåll						Kompetens/förmågor							Mervärde						
		tal och aritmetik	algebra	samband & förändring	geometri	mätning (mått och enheter)	statistik och sannolikhet	tankegång	problembehandling	modellering	resonemang	representation	symbol- och formalism	kommunikation	hjälpmedel	nyfikenhet & motivation	förklara för varandra	behov matematiskt språk	se skillnader, variation	jämföra nationell data	fag/ämnesreflektion
räkneord 1-20	6,7	X																			
räkneord 1-30	8,9	X													X						
julnötter	5,6	X						X			X		X		X						X
skolstatistik	6,7					X			X				X		X						X
problemlösning bråk	6,7	X						X	X		X		X		X						X
förklara bråkuppgifter	8,9	X						X	X		X		X		X						X
ordlistor	5,6	X						X				X		X		X		X			X
prisjämförelse	5,6				X	X		X				X		X		X		X			X
emballagefabriken	6,7			X	X	X		X	X		X		X		X		X				X
statistik - undersöka	7,9				X	X		X	X		X		X		X		X				X
mejerieförpackningar	5	X	X		X			X	X		X		X		X		X				X
pizzafesten	7				X			X	X		X		X		X		X				X
Rutiga Familjen	6,7	X	X					X	X		X		X		X		X				X
Talsystemet	4,5	X						X			X		X		X		X				X

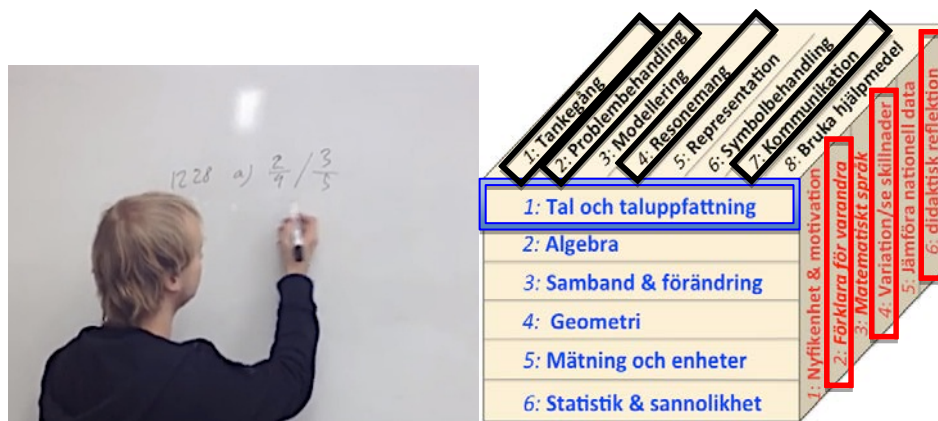
4.2. Exempel där GNUbiska kuben använts som analysverktyg

Som tabellen illustrerar har alla förlöp, i retrospektiv, analyserats med den GNUbiska kuben. De tidigaste pilot-förlöpen som planerades och genomfördes det första året har fungerat som inspiration till modellen, och enbart analyserats i efterhand. Nedan följer två sådana exempel:

Exempel 1: förklara bråkuppgifter, årskurs 8-9

(se rad 6 i Tabell 3 ovan)

Uppgiften gick ut på att eleverna skulle byta uppgifter med varandra. Varje elev fick välja ut (ut matematikboken eller från annat material) en lätt, en medelsvår och en svår bråk-uppgift, som de sedan själva skulle lösa. Sedan fick de i uppgift att fundera över hur de löst uppgifterna och hur de kunde förklara det för någon annan. Förklaringen av lösningsmetoden spelades in, och skickades till sin samarbetspartner efter att partnern löst dessa uppgifter. På så sätt kunde varje elev jämföra sina egna lösningsmetoder med lösningar från andra nordiska klasskamrater. Elevernas samarbete var asynkron; med videoupptagning kompletterad med text. Planen var ursprungligen att eleverna skulle ha synkrona möten och beskriva bråk-uppgifterna för varandra, men man beslutade sedan att de istället skulle spela in på video och skicka till varandra, av flera skäl: 1) det är svårt att hitta gemensamma tider för alla elever, 2) det är problematiskt med uppkopplingen ibland, och 3) inspelad video har fördelen beträffande språket att eleverna kan se på filmerna flera gånger och stanna upp när man inte förstår.



Förlöpet ligger tydligt inom ämnesområdet "Tal och aritmetik", då konceptet bråk hör till detta ämnesområde. Fyra kompetenser tränas på följande sätt: Tankegångskompetensen tränas genom att eleverna behöver *bedöma och värdera uppgifters svårighet* genom att själva välja ut en lätt, medel och svår uppgift. Problembehandlingskompetensen tränas genom att *lösa utvalda uppgifter*, samt lösa uppgifterna från sin nordiska partner. Resonemangskompetensen tränas genom att eleverna *behöver förklara hur de löser uppgifter* i videoklippen, vilket också är träning för kommunikationskompetens.

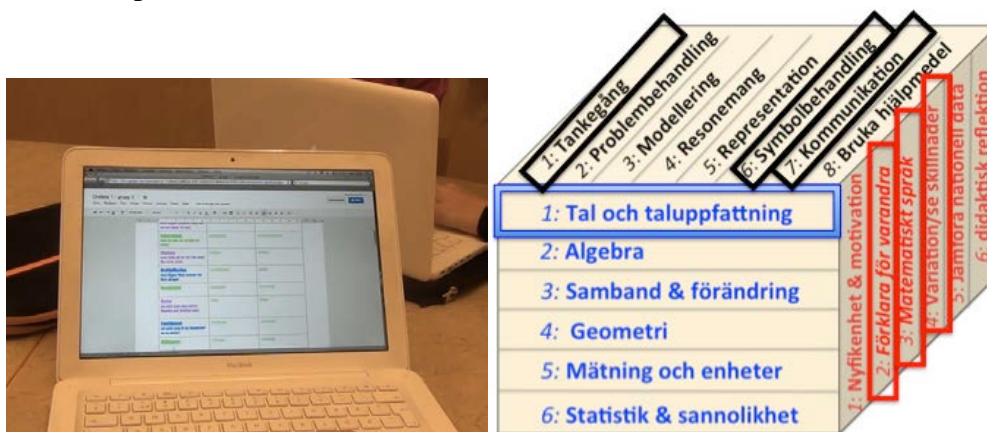
De mervärden som identifierats är följande: Mervärden att förklara för varandra skapas genom att eleverna *behöver förklara sin lösningsmetod*, och här tror

vi att den asynkrona varianten har en fördel även i detta avseende då en *inspelning* sannolikt motiverar till mer eftertanke då den är bestående till skillnad från en muntlig redogörelse. Mervärdet av variation/se skillnader skapas genom att eleverna dels får se typiska uppgifter från andra läroböcker, dels får ta del av andras lösningsmetoder av sina egna uppgifter. Att det är deras egna, utvalda uppgifter är viktigt för motivationen, annars hade det blivit som vilken förklaring som helst. Till sist finns det möjlighet att förlöpet ger ett fag-didaktiskt mervärde om det uppstår diskussioner om olika lösningsmetoder, vad som anses vara svårt och lätt, men här kan det behövas lite support från lärarnas håll för att diskussionerna ska komma till stånd.

Exempel 2: Ordlistor, årskurs 4-5

(se rad 7 i Tabell 3 ovan)

Uppgiften gick ut på att eleverna konstruerade egna ordlistor, där varje nationell grupp fick hitta på 10 matematiska ord (begrepp) och skriva en förklaring. De andra två grupperna i klassmatchgruppen fick sedan fylla i vad begreppet heter på deras respektive språk. Det fag-didaktiska målet med ordlistorna blev en naturlig situation för eleverna att träna sig på att förklara dessa begrepp, samt att använda matematiskt språk när det upplevdes svårt att specificera vad t.ex. addition betyder utan att använda exempel.



Förlöpet hamnade inom ämnesområdet ”Tal och aritmetik” eftersom eleverna var relativt unga (4-5 klass/trin) och de fick själva välja begrepp vilket resulterade i att begreppen hamnade inom detta ämnesområde. Dock kan samma förlöp göras med begrepp inom annat ämnesområde. Uppgiften med att skapa ordlistor tränar på tankegångskompetensen genom att grundläggande begrepp behöver förklaras, vilket uppmuntrar till reflektion över sin egen begreppsförståelse. Kommunikationskompetens tränas likaså genom förklaringen, och genom de konkreta matematiska exempel som eleverna oftast tog till i sina förklaring tränades även symbol- och formalismkompetens.

De mervärden som identifierats är följande: förklara för varandra genom att eleverna behövde beskriva begreppen så andra förstår, matematisk språk genom att eleverna kan se ett behov av att beskriva begrepp med matematiskt språk (det blir för

ospecifikt och svårt att förklara med bara ord), och slutligen mervärdet av att se skillnader genom att resonera om begrepps betydelse och ursprung genom olika språkliga variationer av samma begrepp.

5. GNUbiska kuben som innovations- och planeringsverktyg

Den GNUbiska kuben kan användas som innovationsverktyg, genom att kuben kan användas för att stimulera till och generera nya typer förlöp i GNU. Alla kombinationer av ämnesområde-kompetens-mervärde kommer inte vara lika naturliga att generera idéer från, men tanken är att man kan använda kuben som en ”tärning” för att slumpmässigt få fram en ny kombination, som t.ex. i Figure 4 nedan: kombinationen ämnesområdet algebra, kompetensen resonemang och mervärdet att förklara för varandra. Syftet är sedan att utifrån den kombinationen försöka komma på ett lämpligt GNU-förlöp. Metoden att stimulera till tankar utanför de vanliga ramarna är ofta använt inom olika typer av kreativa processer. Det är på detta sätt som kreativa verktyg kan vara användbara.

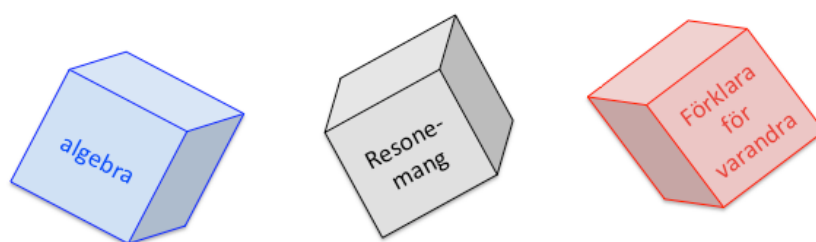


Figure 4. GNUbisk kub som idé-genererande tärning

När kuben används för att generera idéer till och planera gränsöverskridande undervisning, så finns redan från början en tydlig koppling till respektive läroplan, det finns en uttalad överenskommelse om vilken typ av kompetens/er som förlöpet tränar och det finns redan i förväg identifierade mervärden med upplägget. Sammantaget borde en sådan process både effektivisera planeringen, stödja kommunikationen, samt ge bättre kvalitet på planerade förlöp (förutsatt att de fungerar att genomföra praktiskt).

Gnubiska kuben har använts som ett planeringsverktyg både av lärarna själva, samt i dialog med forskarna under projektets två sista år. Bedömningen är att det tar lite olika lång tid att bli bekväm med att använda modellen, men att de flesta lärarna uppskattar den som ett stöd i planeringen och som en bra kategoriseringsmodell. Nedan följer två exempel på GNU-förlöp som planerats med hjälp av den GNUbiska kuben.

Exempel 1: Mejeriprodukter, årskurs 5

(se rad 11 i Tabell 3 ovan)

Förlöpet består av en utforskande, kollaborativ problemlösningsuppgift där två grupper samarbetar för att lösa problem om förhållanden mellan bråk och procent.



Till sin hjälp har de tagit med sig olika mejerieförpackningar från sina respektive länder. Uppgiftsbeskrivningar är på tre språk och handlar om att utforska och sortera de två gruppernas gemensamma mängd av förpackningar enligt olika förhållanden som t.ex. fettrikaste produkt, volym, storleksproportion mellan förpackningarna, etc. Syftet är att träna kopplingen mellan bråk och procent genom att räkna om mellan dessa.

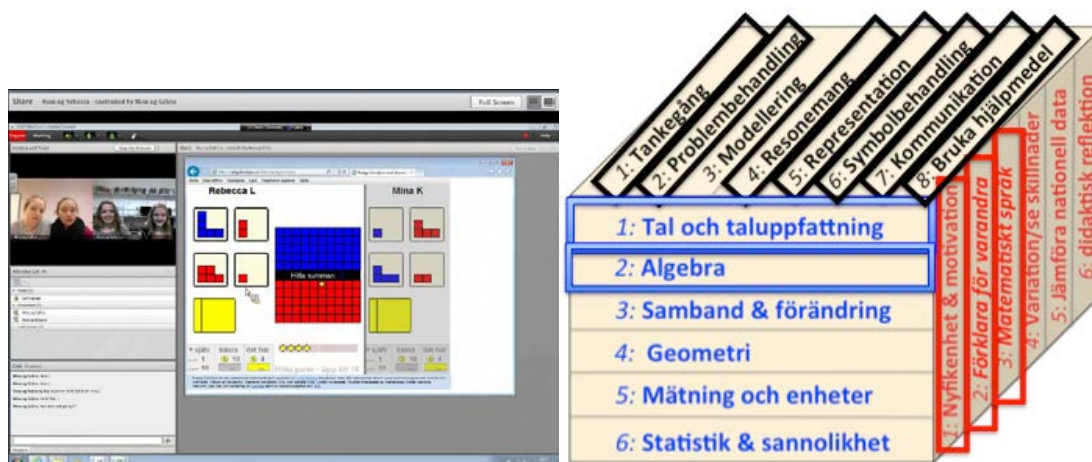
De kompetenser som tränas i förlopet är problemlösning genom att komma på hur jämförelsen och sortering av olika mejerieförpackningar kan gå till, vilket inte är självklart om förpackningarnas innehåll beskrivs med olika typer av mått (vikt, volym) och olika enheter. Resonemangskompetensen tränas genom att fundera och diskutera hur olika innehållsegenskaper beräknas. Representationskompetensen tränas i uppgifterna, där eleverna behöver bestämma hur de ska representera procent och andelar i sina beräkningar och lösningar. Tankegångskompetensen tränas genom relationen mellan procent och andelar behöver utredas, och användas för att lösa problemen. Slutligen tränas kommunikationskompetensen genom att grupperna verkligen behöver samarbeta med varandra då varje grupp enbart innehar hälften av förpackningarna som ska ingå i resonemangen och lösningarna.

Identifierade mervärden innefattar nyfikenhet och motivation genom utforska vilka mejeriprodukter grannländerna har, vad de kostar och vad de innehåller. Mervärdet förklara för varandra kan uppstå när eleverna behöver komma överens om beräkningsmetoder och tillvägagångsätt, och mervärdet jämföra nationell data ingår i hela idén med upplägget och jämförelserna.

Exempel 2: Rutiga Familien, årskurs 6-7

(se rad 13 i Tabell 3 ovan)

Syftet med uppgiften är att eleverna skulle bli kjent med addisjon og subtraksjon med negative tall gjennom samarbeidet i Rutiga familien ([Fuglevåg, Lønberg-Jensen & Wølner](#)), som är ett digital lærspel. Samtidig ville det være nødvendig at elevene kommuniserte for å løse der forskjellige problemstillingene sammen.



De kompetenser som tränas i förlöpet är

- Representasjonskompetanse fordi de her både måtte forstå, avkode, tolke og bruke ulike representasjoner av matematiske objekter i form av mengder. Samtidig måtte de forså forbindelsene mellom de ulike representasjonsformene for å kunne velge se sammenhenger.
- Symbol- og formalismekompetanse fordi elevene her hadde en utfordring i å kunne oversette mellom matematiske symbolspråk og dagligtale, og da dagligtale for både dansk og norsk. Dessuten måtte de ha innsikt i de matematiske «spillereglene» innenfor Rutiga Familjen.
- Problembehandlingskompetanse fordi elevene måtte finne og formulere hva som var de matematiske problemstillingene, og deretter løse dem. Noen ganger så de også at det var flere veier til målet. Det vil si at de kunne løse på flere måter.
- Tankegangskompetanse kom inn som en faktor fordi elevene måtte skape en bevissthet rundt hva som var det karakteristiske ved de matematiske utfordringene, og de måtte kunne se hvilke svar som eventuelt forventes. I tillegg måtte de tenke sammen i matematiske nye problemstillinger som når elevene fikk nye utfordringer i for eksempel Hitta summan:0 eller Hitta summan: -1.
- Resonnementskompetanse kommer inn under noe av det samme som under tankegangskompetanse fordi eleven måtte tenke sammen, for å kunne omforme antagelser og resonnementer til gyldige bevis, gjennom å se mulighetene med Rutiga Familjens mengderuter.

Mervärden som identifieras i förlöpet är Nyfikenhet och motivation genom att Rutiga familjen är ett spel som många elever tycker är roligt, samt genom att samarbeta i spelet genom video-konferenssystem med andra grannländers elever. Mervärdet förklara för varandra skapas eftersom i Rutiga familjen måste spelarna diskutera och komma överens om hur de ska spela för att spela bra (vilket de flesta vill göra). Mervärdet behov av matematisk språk uppstod då eleverna använde papperslappar där de översatte grafisk spelmatematik till matematisk språk och visade i webbkameran.

För fler exempel, se fullständiga Förlöpsbeskrivningar av Emballagefabriken, Talsystemet och Rutiga Familjen, samt sammanställning och analys av alla GNU-förlöp i delrapporten "GNU matematik: aktiviteter och resultat".

6. Konklusion/slutsats

Den GNUbiska kuben har använts framgångsrikt som analysverktyg inom matematikgruppen i projektet och som planeringsverktyg för lärarna i projektet med viss support från forskarna för att ta fram nya spännande GNU-förlöp. Kvar återstår att utvärdera modellens användbarhet i nya grupper av lärare och forskare.

Idén med den GNUbiska kuben har även överförts till andra ämnen inom projektet, där motsvarande ämnesdidaktiska kuber har utvecklats och använts i olika utsträckning. Grundkonceptet med att utöka en ämnes-kompetens matris med en mervärdesdimension kan även användas för andra förändringsinriktade arbeten som sker i skolan, t.ex. kan man tänka sig en IKT-didaktisk kub som identifierar mervärden med att införa IKT teknik i skolan.

Den didaktiska modellen för gränsöverskridande samarbete är publicerad i vetenskapliga sammanhang (Pareto, et al., 2013).

Referenser

- Fuglevåg, V., Lønberg-Jensen, K. & Wølner, T.A. (2014). *Rapport fra gruppe C – et klasserom i "skyen"*. Horten: Høgskolen i Buskerud og Vestfold/
<http://projecktgnu.eu>
- Kunnskapsdepartementet. (2006). *Læreplanverket for Kunnskapsløftet* Oslo: <http://www.udir.no/Lareplaner/> (Sist sett 30.08.2014)
- Niss, M., Jensen, T.H., Andersen, T.B, Andersen, R. W., Christoffersen T., Damgaard, S. Gustavsen, T., Jess, K. , Lange, J., Lindenskov,L., Meyer, M. B. & Knud Nissen. (2002). *Kompetencer og matematikklæring*. København: Undervisningsministeriet
- Pareto, L., Lindhardt, B., Vejbaek, L., Wølner, T. A. & Gynther, K. (2013). A Model for Instructional Design in Virtual Nordic Classrooms. In proceedings of The Inaugural European Conference on Technology in the Classroom 2013 (pp. 222-233). Naka Ward, Nagoya, Aichi, Japan: The International Academic Forum.